Cours 4

Action de groupe (sur un ensemble)

Déf Soit G un groupe, soit X un ensemble.

Une action de G sur X est

un morphisme de groupe $\rho : G \longrightarrow \mathfrak{S}_X$

$\mathfrak{S}_X = \{\text{bijections de } X \text{ vers } X\}$

Autrement-dit, c'est une application

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g.x \end{aligned}$$

tq
- $\forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in X$, on a $g_2.(g_1.x) = (g_2 g_1).x$
- $\forall x \in X$ on a $e_G.x = x$.

Notation : $G \circlearrowright X$

Exemples

- X un ensemble structuré (gp, ann, corps, modules, Esp. vectoriel, ---, espace top., var. diff./alg, ---)

$$G = \mathrm{Aut}(X) \circlearrowright X$$

e.g. $\mathrm{Aut}(G) \circlearrowright G$

$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \circlearrowright K$

$GL(V) \circlearrowright V$

$O(V,q) \circlearrowright V$

$\mathcal{C}^0(X,X) \circlearrowright X$ esp. top.

$\mathrm{Diff}(X) \circlearrowright X$ var diff.

$\vdots$ $\vdots$

- G gp. L'action translation à gauche.

$$\rho_l : G \longrightarrow \mathfrak{S}_G$$
$$g \longmapsto \left(\begin{array}{rcl} \rho_l(g) : G & \longrightarrow & G \\ h & \longmapsto & gh \end{array} \right)$$

L'action de translation à droite

$$\rho_r : G \longrightarrow \mathfrak{S}_G$$
$$g \longmapsto \left(\begin{array}{rcl} \rho_r(g) : G & \longrightarrow & G \\ h & \longmapsto & hg^{-1} \end{array} \right)$$

- G gp. L'action de conjugaison :

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$$
$$g \longmapsto \left(\begin{array}{rcl} \rho_g : G & \xrightarrow{\sim} & G \\ h & \longmapsto & ghg^{-1} \end{array} \right)$$

Plus généralement, si $H \triangleleft G$

$$\begin{aligned} \rho : G &\longrightarrow \mathrm{Aut}(H) \\ g &\longmapsto \left(\begin{aligned} \rho_g : H &\longrightarrow H \\ h &\longmapsto ghg^{-1} \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

Variante : Comme $H \triangleleft N_G(H)$, on a une action de conj. :

$$\rho : N_G(H) \longrightarrow \mathrm{Aut}(H).$$

Variante Une action à droite d'un gp G sur un ensemble X est juste une action (à gauche) de G^{op} sur X.

i.e. un morphisme de groupe

$$\rho : G^{op} \longrightarrow \mathfrak{S}_X.$$

Autrement-dit : c'est une application

$$\begin{aligned} X \times G &\longrightarrow X \\ (x, g) &\longmapsto x.g \end{aligned}$$

tq (i) $x.e_G = x \quad \forall x \in X$

(ii) $\forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in X, \quad (x.g_1).g_2 = x.(g_1 g_2)$.

Rq on a vu que $\begin{array}{ccc} G^{op} & \xrightarrow{\simeq} & G \\ g & \longmapsto & g^{-1} \end{array}$

Décomposition en orbites si $G \circlearrowright X$

Déf: $x \sim y \iff \exists g \in G$ tq $x = g \cdot y$

Lemme si $G \circlearrowright X$ alors

(i) $\sim$ est une relation d'équivalence

(ii) $X = \bigsqcup_i \mathcal{O}_i$ où $\mathcal{O}_i$ est une orbite.

Preuve: (i) par la définition d'action

$$\left(\begin{array}{lcl} \cdot\ \text{Reflexivité} & \longleftrightarrow & e_G. \\ \cdot\ \text{Symétrie} & \longleftrightarrow & g^{-1} \\ \cdot\ \text{Transitivité} & \longleftrightarrow & \text{associativité}. \end{array} \right)$$

(ii) Trivial.. $\square$

Thm Si $G \circlearrowright X$

Soit $x \in X$, on note $\mathcal{O}_x$ l'orbite contenant x

Alors on a une bijection

$$\varphi : G/\mathrm{Stab}_G(x) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_x := \{ g.x \mid g \in G \}$$

$$[g] \longmapsto g.x$$

où $\mathrm{Stab}_G(x) := \{ g \in G \mid g.x = x \}$

Preuve • On vérifie facilement que $\mathrm{Stab}_G(x)$ est un sous-gp de G. (Exo)

• φ est bien-définie :

si $[g] = [g']$ i.e. $g^{-1}g' \in \mathrm{Stab}_G(x)$

alors $(g^{-1}g') . x = x$

$$\begin{array}{c} (g^{-1}g').x \\ \| \\ g^{-1}.(g'.x) \end{array}$$

$\overset{g.}{\Longrightarrow} g'.x = g.x$

• φ est injective

Soient $[g_1], [g_2] \in G/\mathrm{Stab}_G(x)$

si $\varphi([g_1]) = \varphi([g_2])$

$$\begin{array}{ccc} \varphi([g_1]) & = & \varphi([g_2]) \\ \| & & \| \\ g_1.x & & g_2.x \end{array}$$

$$\overset{g_2^{-1}.}{\Longrightarrow} \quad g_2^{-1}.(g_1.x) = g_2^{-1}.(g_2.x)$$

$$g_2^{-1}.(g_1.x) = (g_2^{-1}g_1).x \qquad g_2^{-1}.(g_2.x) = (g_2^{-1}.g_2).x = e_G.x = x$$

$\Longrightarrow \quad g_2^{-1}g_1 \in \mathrm{Stab}_G(x)$

$\Longrightarrow \quad [g_1] = [g_2] \in G/\mathrm{Stab}_G(x).$

- ~~φ est surjective~~ (trivial)

$\forall y \in \mathcal{O}_x$ on a $g \in G$ tq $y = g.x$

$\Longrightarrow \quad \varphi([g]) = g.x = y$ $\square$

<u>Cor</u> : si $|\mathcal{O}_x| < \infty$, on a

$$|\mathcal{O}_x| = [G : \mathrm{Stab}_G(x)]$$

Exemple (Ex 18)

On considère l'action de conjugaison de G sur G

Thm / Cor $\Rightarrow$ on a une bijection

$$\mathcal{O}_a \simeq G / \mathrm{Stab}_G(a)$$

Or. $\mathcal{O}_a = \{ gag^{-1} \mid g \in G \}$ = la classe conj. de a.

$$\mathrm{Stab}_G(a) = Z_G(a) = N_G(a).$$

$\square$.